ΜΑΘΗΜΑ 48
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4^{η} ΔΕΚΑΔΑ

31.

Έστω f συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[0, 1]$, με $f(0) > 0$.
Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο $[0, 1]$, για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt$ και $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, $x \in [0, 1]$

Μεγάλης δυσκολίας

i) Δείξτε ότι $F(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$

ii) Δείξτε ότι $f(x)G(x) > F(x)$ για κάθε $x \in (0, 1]$

iii) Δείξτε ότι $\dfrac{F(x)}{G(x)} \le \dfrac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε $x \in (0, 1]$

Προτεινόμενη λύση

i)

Προφανώς είναι $F'(x) = f(x)g(x)$ **(1)** και $F(0) = \int_0^0 f(t)g(t)dt = 0$ **(2)**

Για $0 < x < 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0) < f(x) \Rightarrow 0 < f(x)$

Και επειδή $g(x) > 0$ στο $[0, 1]$, η (1) $\Rightarrow$ $F'(x) > 0$ στο $(0, 1]$

άρα F γν. αύξουσα στο $[0, 1]$

Για $0 < x < 1 \overset{F\uparrow}{\Rightarrow} F(0) < F(x) \Rightarrow 0 < F(x)$

ii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x)\int_0^x g(t)dt > \int_0^x f(t)g(t)dt$

$$\int_0^x f(x)g(t)dt - \int_0^x f(t)g(t)dt > 0$$

$$\int_0^x \big(f(x)g(t) - f(t)g(t)\big)dt > 0$$

$$\int_0^x g(t)\big(f(x) - f(t)\big)dt > 0$$

$$g(t)\big(f(x) - f(t)\big) > 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Απόδειξη της (1): Είναι $g(t) > 0$ από υπόθεση

Και $f(x) - f(t) > 0$, αφού $0 < t < x$ και f γν.αύξουσα

iii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{F(x)}{G(x)}$ είναι γν. αύξουσα στο $(0, 1]$

Είναι $h'(x) = \dfrac{F'(x)G(x) - G'(x)F(x)}{[G(x)]^2} = \dfrac{f(x)g(x)G(x) - g(x)F(x)}{[G(x)]^2}$

$$= \frac{g(x)\big(f(x)G(x) - F(x)\big)}{[G(x)]^2} > 0,$$

αφού $g(x) > 0$ και $f(x)G(x) - F(x) > 0$ από (ii).

Άρα h γν.αύξουσα

32.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$

ii) Αν g συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = g''(x)$$

iii) Αν για τη συνάρτηση f του πρώτου ερωτήματος και τη συνάρτηση g του δεύτερου ερωτήματος ισχύουν

$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$, $g(0) = g'(0) = 1$, τότε δείξτε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $\int_0^2 f(t)dt = c$, τότε η αρχική υπόθεση γίνεται $f(x) = (10x^3+3x)c - 45$

$f(x) = 10cx^3+3xc - 45$ **(1)**

$$(1) \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (10cx^3 + 3xc - 45)dx$$

Να θυμόμαστε αυτή τη διαδικασία

$$c = \left[10c\frac{x^4}{4} + 3c\frac{x^2}{2} - 45x\right]_0^2$$

$$c = 40c + 6c - 90 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

Η (1) γίνεται $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$

ii)

Για το $\lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$ θέτουμε $-h = u$ οπότε $u \to 0$

Τότε $\lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{u\to 0}\frac{g'(x) - g'(x+u)}{-u}$

$= \lim_{u\to 0}\frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x)$ αφού η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

iii)

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = \cancel{\frac{0}{0}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) + g'(x-h)(x-h)'}{2h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{h}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) + g'(x) - g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h} + \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

$$= \frac{1}{2}g''(x) + \frac{1}{2}g''(x) = g''(x)$$

Οπότε η υπόθεση $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} = f(x)+45$ γίνεται

$g''(x) = f(x) + 45$

$g''(x) = 20x^3 + 6x - 45 + 45$

$g''(x) = 20x^3 + 6x$

$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1$

Αλλά $g'(0) = c_1$, άρα $c_1 = 1$ άρα $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$

$g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$

Όμως $g(0) = c_2$, άρα $c_2 = 1$ άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

33.

Αν $z \in C$ και ισχύει $(z+i)^{17} + (2 \cdot i)^{11}(\bar{z}-i)^{6} = 0$, $z \neq -i$,

i) αποδείξτε ότι $|z+i| = 2$

ii) αποδείξτε ότι $1 \leq |z| \leq 3$

iii) βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-6-7i|$

iv) αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = \dfrac{(z+i)^2+4}{z+i}$ είναι πραγματικός

v) αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = (z+i)^{23}$ είναι φανταστικός

Προτεινόμενη λύση

i)

$(z+i)^{17} + (2 \cdot i)^{11}(\bar{z}-i)^{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad (z+i)^{17} = -(2i)^{11}(\bar{z}-i)^{6}$

$|(z+i)^{17}| = |-(2i)^{11}(\bar{z}-i)^{6}|$

$|z+i|^{17} = |(2i)^{11}|\,|(\bar{z}-i)^{6}|$

$|z+i|^{17} = |2i|^{11}|\bar{z}-i|^{6}$

$|z+i|^{17} = |2i|^{11}|\overline{\bar{z}-i}|^{6}$

$|z+i|^{17} = 2^{11}|z+i|^{6}$, $z \neq -i$

$|z+i|^{11} = 2^{11} \quad \Rightarrow \quad |z+i| = 2$

> Παρατηρήστε ότι οι $z+i$, $\bar{z}-i$ είναι συζυγείς

ii)

Τριγωνική ανισότητα : $\big||z|-|i|\big| \leq |z+i| \leq |z|+|i| \Rightarrow$

$\big||z|-1\big| \leq 2 \leq |z|+1$

$\big||z|-1\big| \leq 2$ και $2 \leq |z|+1$

$-2 \leq |z|-1 \leq 2$ και $1 \leq |z|$

$-1 \leq |z| \leq 3$ και $1 \leq |z| \quad \Rightarrow \quad 1 \leq |z| \leq 3$

iii)

$|z-6-7i| = |(z+i)+(-6-8i)|$ (δημιουργούμε τον $z+i$)

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$\big||z+i|-|-6-8i|\big| \leq |(z+i)+(-6-8i)| \leq |z+i|+|-6-8i|$ **(1)**

Αλλά $|-6-8i| = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

(1) $\Rightarrow$ $|2-10| \leq |(z+i)+(-6-8i)| \leq 2+10$

$8 \leq |z-6-7i| \leq 12$

Άρα $|z-6-7i|_{min} = 8$ και $|z-6-7i|_{max} = 12$

iv)

$\bar{w} = \dfrac{\overline{(z+i)^2+4}}{\overline{z+i}} = \dfrac{(\bar{z}-i)^2+4}{\bar{z}-i}$ **(2)**

Όμως $|z+i| = 2 \Leftrightarrow |z+i|^2 = 4$

$(z+i)(\overline{z+i}) = 4$

$(z+i)(\bar{z}-i) = 4$

$\bar{z}-i = \dfrac{4}{z+i}$

> $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Οπότε η (2) γίνεται $\overline{w} = \dfrac{\dfrac{16}{(z+i)^2}+4}{\dfrac{4}{z+i}} = \dfrac{(z+i)^2+4}{z+i} = w$

ν)

$\left(z+i\right)^{17} + (2\cdot i)^{11}(\overline{z}-i)^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(z+i\right)^{17} = -(2\cdot i)^{11}(\overline{z}-i)^6$

$$\left(z+i\right)^{17}(z+i)^{6} = -(2\cdot i)^{11}(\overline{z}-i)^6(z+i)^6$$

$$(z+i)^{23} = -2^{11}\cdot i^{11}\cdot\left[(\overline{z}-i)(z+i)\right]^6$$

$$(z+i)^{23} = -2^{11}\cdot i\cdot(i^2)^5\left[(\overline{z+i})(z+i)\right]^6$$

$$(z+i)^{23} = -2^{11}\cdot i\cdot(-1)\left[|z+i|^2\right]^6$$

$$(z+i)^{23} = i\cdot 2^{11}|z+i|^{12} \quad \text{φανταστικός}$$

34.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \dfrac{2-\overline{z}_1}{2+\overline{z}_1}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$

ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1

iii) Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογίσετε τον z_1 συναρτήσει του α και να δείξετε ότι $(z_1 + 1 + i)^{20} - (\overline{z}_1 + 1 - i)^{20} = 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$z_2 - z_1 = \frac{2-\overline{z}_1}{2+\overline{z}_1} - z_1 = \frac{2-(\alpha-\beta i)}{2+(\alpha+\beta i)} - (\alpha+\beta i) =$$

$$= \frac{(2-\alpha+\beta i)(2+\alpha-\beta i)}{(2+\alpha+\beta i)(2+\alpha-\beta i)} - \alpha - \beta i =$$

$$= \frac{4-\alpha^2-\beta^2+4\beta i}{(2+\alpha)^2+\beta^2} - \alpha - \beta i =$$

$$= \frac{4-\alpha^2-\beta^2}{(2+\alpha)^2+\beta^2} - \alpha + \left(\frac{4\beta}{(2+\alpha)^2+\beta^2} - \beta\right) i \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως $z_2 - z_1 \in \mathbb{R} \iff \dfrac{4\beta}{(2+\alpha)^2+\beta^2} - \beta = 0$

$$\frac{4}{(2+\alpha)^2+\beta^2} - 1 = 0$$

$$(2+\alpha)^2 + \beta^2 = 4 \qquad \textbf{(2)}$$

Η (1) γίνεται $z_2 - z_1 = \dfrac{4-\alpha^2-\beta^2}{(2+\alpha)^2+\beta^2} - \alpha$

$$= \frac{(2+\alpha)^2+\beta^2-\alpha^2-\beta^2}{4} - \alpha$$

$$= \frac{4+4\alpha+\alpha^2+\beta^2-\alpha^2-\beta^2-4\alpha}{4} = 1$$

ii)

Από τη (2) προκύπτει ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $K(-2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

iii)

$z_1^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$

z_1^2 φανταστικός $\iff \alpha^2 - \beta^2 = 0 \iff \alpha^2 = \beta^2 \iff \alpha = \beta$, αφού α, β ομόσημοι

Τότε $z_1 = \alpha + \alpha i = \alpha(1+i)$.

$$(z_1 + 1 + i)^{20} - (\overline{z}_1 + 1 - i)^{20} = \big(\alpha(1+i) + 1 + i\big)^{20} - \big(\alpha(1-i) + 1 - i\big)^{20}$$

$$= [(1+i)(\alpha+1)]^{20} - [(1-i)(\alpha+1)]^{20}$$

$$= (\alpha+1)^{20}\,[(1+i)^{20} - (1-i)^{20}]$$

$$= (\alpha + 1)^{20} \{ [(1 + i)^2]^{10} - [(1 - i)^2]^{10} \}$$
$$= (\alpha + 1)^{20} [(2i)^{10} - (2i)^{10}] = 0$$

Όταν κολλήσεις :

i) Κοίταξε προσεκτικά τις υποθέσεις και ιδιαίτερα αυτές που δεν έχεις χρησιμοποιήσει

ii) Δες τα συμπεράσματα που προηγήθηκαν

35 .

Για τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f δίνεται ότι $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(2t-x)dt$, $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξτε ότι :

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την παράγωγο της ως συνάρτηση της f (x)

ii) $f(x)=e^x-x-1$, αφού προηγουμένως βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = -x\,e^{-x} - e^{-x}$

iii) Η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς μία ρίζα

iv) $e^x > x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

v) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Για το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(2t-x)dt$, θέτουμε $2t-x=u$ οπότε $du = 2dt$

Όταν $t=\dfrac{x}{2}$ τότε $u = 0$ και όταν $t=x$ τότε $u=x$.

Οπότε $2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(2t-x)dt = 2\int_0^x f(u)\dfrac{1}{2}du = \int_0^x f(u)du$

Η υπόθεση γίνεται $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\int_0^x f(u)du$, $x\in\mathbb{R}$ **(1)**

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$, άρα η $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ σαν πράξεις

παραγωγίσιμων , με $f'(x) = x + f(x)$

ii)

$g'(x) = (-x\,e^{-x} - e^{-x})' = -e^{-x} + x\,e^{-x} + e^{-x} = x\,e^{-x}$ **(2)**

$$f'(x) = x + f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = x$$
$$e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = x\,e^{-x} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$
$$(e^{-x} f(x))' = (-x\,e^{-x} - e^{-x})'$$
$$e^{-x} f(x) = -x\,e^{-x} - e^{-x} + c \quad \textbf{(3)}$$

Η (1) για $x = 0$ δίνει $f(0) = 0$

Η (3) για $x = 0$ δίνει $c = 1$

Οπότε η (3) γίνεται $e^{-x} f(x) = -x\,e^{-x} - e^{-x} + 1 \Leftrightarrow$
$$f(x) = -x - 1 + e^x$$
$$f(x) = e^x - x - 1$$

iii)

Προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι η $x = 0$

$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Πρόσημο της f ΄και μονοτονία της f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f΄		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	|	$\nearrow$	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$.
Άρα για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) > f(0) = 0$, επομένως η ρίζα $x = 0$ είναι μοναδική.

iv)
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq 0 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0$

$$e^x \geq x + 1 > x$$

v)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^x - x - 1) = \cancel{+\infty-(+\infty)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) \quad \textbf{(4)}$$

Αλλά $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \cancel{\frac{+\infty}{+\infty}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty$

και $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ και $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

(4) $\Rightarrow \displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x - x - 1) = 0 - (-\infty) - 1 = +\infty$$

36.

Έστω συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{x^8}{x^8 + (1-x)^8}$.

Δείξτε ότι

i) Είναι γνησίως αύξουσα

ii) $f(x) + f(1-x) = 1$

iii) $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{2}$

iv) $\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1$, θεωρώντας ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f'(x) = \frac{8x^7[x^8+(1-x)^8] - x^8[8x^7 - 8(1-x)^7]}{[x^8+(1-x)^8]^2}$$

$$= \frac{8x^7(1-x)^7}{[x^8+(1-x)^8]^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1)$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, θα είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό

ii)

$$f(x) + f(1-x) = \frac{x^8}{x^8+(1-x)^8} + \frac{(1-x)^8}{(1-x)^8+x^8} = \frac{x^8+(1-x)^8}{x^8+(1-x)^8} = 1$$

iii)

f και $1-x$ συνεχείς $\Rightarrow$ η σύνθεσή τους $f(1-x)$ συνεχής, άρα και το άθροισμα $f(x) + f(1-x)$

$$f(x) + f(1-x) = 1 \Rightarrow \int_0^1 \big(f(x) + f(1-x)\big)dx = \int_0^1 1dx$$

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(1-x)dx = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(1-x)dx$, θέτουμε $1-x = u \Rightarrow du = -dx$

Όταν $x = 0$ τότε $u = 1$

Όταν $x = 1$ τότε $u = 0$

Οπότε $\int_0^1 f(1-x)dx = \int_1^0 -f(u)du = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx$

$$(1) \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 1 \Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

iv)

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$, θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Rightarrow x = f(u)$

$dx = f'(u)du$

Όταν $x = 0$ τότε $u = f^{-1}(0) = f^{-1}(f(0)) = 0$

Όταν $x = 1$ τότε $u = f^{-1}(1) = f^{-1}(f(1)) = 1$

Άρα $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 uf'(u)du = \int_0^1 xf'(x)dx$

Οπότε $\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 xf'(x)dx$

$$= \int_0^1 f(x)dx + \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx$$

$$= 1f(1) = 1$$

37.

i) Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ έτσι , ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$P(x) = P'(x) + \frac{x^3}{6}.$$

ii) Να βρείτε το πλήθος και το πρόσημο των πραγματικών ριζών του $P(x)$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$P(x) = P'(x) + \frac{x^3}{6} \Leftrightarrow P(x) - P'(x) = \frac{x^3}{6} \qquad \textbf{(1)}$$

Έστω ότι το $P(x)$ είναι ν-στού βαθμού, τότε το $P'(x)$ θα είναι $\nu-1$ βαθμού .
Άρα ο βαθμός της διαφοράς $P(x) - P'(x)$ θα είναι ν .
Λόγω της (1), ο βαθμός της διαφοράς είναι 3. Άρα $\nu = 3$.
Έστω λοιπόν ότι $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta - 3\alpha x^2 - 2\beta x - \gamma = \frac{x^3}{6} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha x^3 + (\beta - 3\alpha)x^2 + (\gamma - 2\beta)x + \delta - \gamma = \frac{x^3}{6} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha = \frac{1}{6} \quad \text{και} \quad \beta - 3\alpha = 0 \quad \text{και} \quad \gamma - 2\beta = 0 \quad \text{και} \quad \delta - \gamma = 0$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε $\alpha = \frac{1}{6}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ και $\delta = 1$

Οπότε $P(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

ii)

$P'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

$\Delta = -1 < 0$, άρα $P'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Επομένως η συνάρτηση P είναι γνησίως αύξουσα.

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{6}x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{6}x^3 = +\infty$$

Και επειδή η P είναι συνεχής , το σύνολο τιμών της θα είναι $P(A) = \mathbb{R}$.
Στο σύνολο τιμών περιέχεται το 0 , άρα η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Και επειδή η P είναι γνησίως αύξουσα , η ρίζα είναι μοναδική.

Είναι φανερό ότι $P(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \geq 0$

Οπότε η ρίζα θα είναι αρνητική

38.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $(-e\,,+\infty)$, τέτοια ώστε

$f(x)=1+\int_0^x e^{-f(t)}dt$ για κάθε $x\in(-e\,,+\infty)$

i) Δείξτε ότι $f(x) = \ln(x + e)$

ii) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε τη αντίστροφή της.

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τους άξονες

iv) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, όταν $\text{Re}(z)\geq 0$ και ισχύει

$e^{f(x)} + 2e^x - x|z| \geq e + 2$ για κάθε $x\in(-e,+\infty)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού η f είναι συνεχής στο $(-e\,,+\infty)$, θα είναι συνεχής και η $e^{-f(t)}$

σαν σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Οπότε η $\int_0^x e^{-f(t)}dt$ θα είναι παραγωγίσιμη,

επομένως και η $f(x)=1+\int_0^x e^{-f(t)}dt$

$$f'(x) = \left(1+\int_0^x e^{-f(t)}dt\right)'$$

$$f'(x) = 0 + \left(\int_0^x e^{-f(t)}dt\right)'$$

$$f'(x) = e^{-f(x)}$$

$$f'(x)\,e^{f(x)} = 1$$

$$[e^{f(x)}]' = x'$$

$$e^{f(x)} = x + c \qquad \textbf{(1)}$$

Η υπόθεση για $x = 0$ δίνει $f(0) = 1$

Η (1) για $x = 0$ δίνει $c = e$

Η (1) γίνεται $e^{f(x)} = x + e$

$f(x) = \ln(x + e)$, $x\in(-e,+\infty)$

ii)

Είναι $f'(x) = \dfrac{1}{x+e} > 0$ για κάθε $x\in(-e,+\infty)$

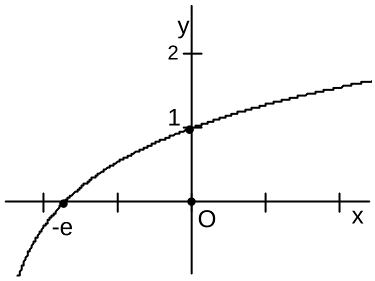
Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα '1 − 1', οπότε αντιστρέφεται.

Έστω $y = \ln(x + e) \Leftrightarrow x + e = e^y \Leftrightarrow x = e^y - e$

Επειδή $x > -e$, θα πρέπει $e^y - e > -e \Leftrightarrow$

$e^y > 0$ που ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Οπότε $f(A)=\mathbb{R}$, άρα $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = e^x - e$



iii)

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x + e) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - e$

$f(0) = \ln(0 + e) = \ln e = 1$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x + e) > 0 \Leftrightarrow x > 1 - e$

Διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $[1-e\ ,\ 0]$
άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{1-e}^{0} \ln(x+e)dx = \int_{1-e}^{0} x'\ln(x+e)dx \\
&= \left[x\ln(x+e)\right]_{1-e}^{0} - \int_{1-e}^{0}\frac{x}{x+e}dx \\
&= 0 - \int_{1-e}^{0}\frac{x+e-e}{x+e}dx \\
&= \int_{0}^{1-e}\left(1-\frac{e}{x+e}\right)dx \\
&= \left[x - e\ln(x+e)\right]_{0}^{1-e} = 1 \quad \text{τετραγωνική μονάδα}
\end{aligned}
$$

Για να πάμε από ανισότητα σε ισότητα χρειαζόμαστε Fermat

iv)

$e^{f(x)} + 2e^{x} - x|z| \geq e + 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{f(x)} + 2e^{x} - x|z| - e - 2 \geq 0 \quad$ **(2)**

Έστω η συνάρτηση $\quad g(x) = e^{f(x)} + 2e^{x} - x|z| - e - 2\ ,\quad x > -e$

$g(0) = e^{f(0)} + 2e^{0} - e - 2 = e + 2 - e - 2 = 0$

Η (2) γίνεται $\quad g(x) \geq g(0) \quad$ για κάθε $x \in (-e, +\infty)$

Το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $(-e, +\infty)$, η g παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 και παραγωγίζεται σε αυτό , άρα με βάση το θεώρημα του Fermat θα ισχύει $g'(0) = 0$.

Όμως $\quad g'(x) = e^{f(x)} f'(x) + 2e^{x} - |z|\ $ οπότε

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow e\,\frac{1}{e} + 2 - |z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 3$$

Οι εικόνες του z κινούνται στον κύκλο με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα $\rho = 3$
Επειδή όμως $Re(z) \geq 0$, οι εικόνες του z βρίσκονται στο δεξιά ημικύκλιο ως προς τον άξονα y΄y.

39.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^{2012}}}+2$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

ii) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$

iii) Αν ω, φ συνεχείς συναρτήσεις με $\omega(x)\geq\varphi(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$, να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\geq\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

iv) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1}f(t)dt$

Προτεινόμενη λύση

i)

Είναι $A_f=\mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{-\dfrac{2012x^{2011}}{2\sqrt{1+x^{2012}}}}{1+x^{2012}}=-\frac{1006x^{2011}}{\left(1+x^{2012}\right)\sqrt{1+x^{2012}}}$$

$f'(x)=0 \iff x=0$

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

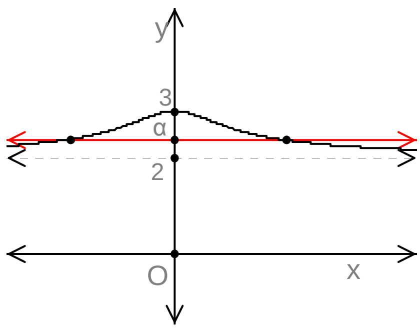
x	$-\infty$ 0 $+\infty$
f'	$+$ 0 $-$
f	$\nearrow$ | $\searrow$

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=0$, το $f(0)=3$

ii)

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^{2012}}}+2\right)=\left(\frac{1}{+\infty}\right)+2=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^{2012}}}+2\right)=\left(\frac{1}{+\infty}\right)+2=2$$



Όταν $x\in(-\infty,\ 0]$, το σύνολο τιμών είναι το $f_1(A)=(2,\ 3]$.

Όταν $x\in[0,\ +\infty)$, το σύνολο τιμών είναι το $f_2(A)=(2,\ 3]$.

Και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών αυτής είναι το $f(A)=(2,\ 3]$

- Όταν $\alpha<2$ ή $\alpha>3$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη, αφού ο α δεν ανήκει στο $f(A)$. [Η ευθεία $y=\alpha$ δεν έχει κοινό σημείο με τη C_f]
- Όταν $\alpha\in(2,\ 3)$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία στο $(-\infty,\ 0)$ και μία στο $(0,\ +\infty)$, δεδομένου ότι είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά. [Η ευθεία $y=\alpha$ έχει δύο ακριβώς κοινά σημεία με τη C_f]
- Όταν $\alpha=3$, τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha=3$ έχει ακριβώς μία ρίζα, το 0, πολλαπλότητας 2012. [Η ευθεία $y=\alpha$ έχει ένα ακριβώς ένα κοινό σημείο με τη C_f, το $(0,3)$]

iii)

$\omega(x) \geq \omega(x) \Rightarrow \omega(x) - \varphi(x) \geq 0$

$$\int_\alpha^\beta (\omega(x) - \varphi(x))dx \geq 0$$

$$\int_\alpha^\beta \omega(x)dx - \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \geq 0$$

$$\int_\alpha^\beta \omega(x)dx \geq \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$$

iv)

Έστω $x > 0$ και $t \in [x, x+1]$

Προσέξτε αυτή τη διαδικασία

$$x \leq t \leq x+1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x) \geq f(t) \geq f(x+1) \overset{iii}{\Rightarrow}$$

$$\int_x^{x+1} f(x)dt \geq \int_x^{x+1} f(t)dt \geq \int_x^{x+1} f(x+1)dt$$

$$f(x)\int_x^{x+1} dt \geq \int_x^{x+1} f(t)dt \geq f(x+1)\int_x^{x+1} dt$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^{2012}}}+2\right)(x+1-x) \geq \int_x^{x+1} f(t)dt \geq \left(\frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^{2012}}}+2\right)(x+1-x)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^{2012}}}+2\right) \geq \int_x^{x+1} f(t)dt \geq \left(\frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^{2012}}}+2\right)$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^{2012}}}+2\right) = 2 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(1+x)^{2012}}}+2\right)$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt = 2$

40.

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f\,'$ γνησίως αύξουσα και η συνάρτηση $g(x)=f(x)+f(4022-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να εξετάσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της g

ii) Να δείξετε ότι $\int_{2010}^{2012} f(x)dx \ge 2f(2011)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη θα είναι παραγωγίσιμη και η g (πράξεις παραγωγίσ.)

$g'(x)=f\,'(x)-f\,'(4022-x)$

$$g\,'(x)\ge 0 \iff f\,'(x)-f\,'(4022-x)\ge 0$$

$$f\,'(x)\ge f\,'(4022-x) \overset{f'\uparrow}{\iff}$$

$$x\ge 4022-x \iff x\ge 2011$$

Πρόσημο της $g\,'$ και μονοτονία της g

x	$-\infty$	2011	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

Η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=2011$, το $g(2011)=f(2011)+f(4022-2011)$

$= f(2011) + = f(2011)$

$= 2f(2011)$

ii)

Από το (i) έχουμε $g(x)\ge g(2011) \Rightarrow g(x)\ge 2f(2011)$

$$g(x)\ -\ 2f(2011)\ge 0$$

$$\int_{2010}^{2012}\left(g(x)-2f(2011)\right)dx\ge 0$$

$$\int_{2010}^{2012} g(x)dx\ -\ 2\int_{2010}^{2012} f(2011)dx\ge 0$$

$$\int_{2010}^{2012} g(x)dx\ge 2\int_{2010}^{2012} f(2011)dx$$

$$\int_{2010}^{2012} g(x)dx\ge 2f(2011)\int_{2010}^{2012} dx$$

$$\int_{2010}^{2012} g(x)dx\ge 4\,f(2011)$$

$$\int_{2010}^{2012} (f(x)+f(4022-x))dx\ge 4\,f(2011)$$

$$\int_{2010}^{2012} f(x)dx+\int_{2010}^{2012} f(4022-x)dx\ge 4\,f(2011) \qquad \textbf{(1)}$$

Θυμόμαστε προσαρμογή του (ii) στο (i)

Για το ολοκλήρωμα $\int_{2010}^{2012} f(4022-x)dx$:

Θέτουμε $4022-x=u \Rightarrow dx=-du$

Όταν $x=2010$ τότε $u=2012$ και όταν $x=2012$ τότε $u=2010$

Άρα $\int_{2010}^{2012} f(4022-x)dx=\int_{2012}^{2010} -f(u)du = \int_{2010}^{2012} f(u)du=\int_{2010}^{2012} f(x)dx$

Η (1) $\Rightarrow \int_{2010}^{2012} f(x)dx+\int_{2010}^{2012} f(x)dx \ge 4\,f(2011)$

$$2\int_{2010}^{2012} f(x)dx \geq 4f(2011)$$

$$\int_{2010}^{2012} f(x)dx \geq 2f(2011)$$